- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذوات المعاملات المتغيرة
والتي ترد إلى معادلات تفاضلية ذوات معاملات ثابتة :

Date : / /   Subject: المحاضرة الخامسة عشرة والأخيرة نظري

٢- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = f(x)$$

ولنفرض أنّ : $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2v'u' + uv''$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (1) فنجد أنّ :

$$* \quad uv'' + (2u' + P(x)u)\, v' + (u'' + P(x)\, u' + Q(x)\, u)\, v = f(x).$$

إذا فرضنا أنّ : $2u' + P(x)u = 0$ عندئذٍ :

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2} P(x)$$
$$\ln u = -\frac{1}{2}\int P(x)\, dx \qquad u = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\, dx}$$

أي أنّ : $y = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}\, v$

إذا فرضنا أنّ : $Q_1(x) = u'' + P(x)\, u' + Q(x)\, u$

عندئذٍ : ومن كون :

$$u' = -\frac{1}{2} P(x)\, u$$
$$u'' = -\frac{1}{2} P'(x)\, u - \frac{1}{2} P(x)\, u'$$

أي أنّ : $u'' = -\frac{1}{2} P'(x)\, u + \frac{1}{4} P^2(x)\, u$

أي أنّ :

$$Q_1(x) = Q(x)\cdot u + \frac{1}{4} P^2(x)\, u - \frac{1}{2} P'(x)\, u - \frac{1}{2} P^2(x)\, u$$

$$Q_1(x) = Q(x)\, u - \frac{1}{4} P^2(x)\, u - \frac{1}{2} P'(x)\, u$$

المعادلة * تأخذ الشكل الآتي :

$$uv'' + \left(Q(x)u - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x)\right) u\, v = f(x)$$

ومنه فإنّ المعادلة السابقة تأخذ الشكل :

$$v'' + \left(Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x)\right) v = f(x) \cdot e^{\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

- إذا كان :

$$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) = k$$

k ثابتاً عددياً تأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$v'' + k\cdot v = f(x)\, e^{+\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذوات المعاملات المتغيرة والتي ترد إلى معادلات تفاضلية ذوات معاملات ثابتة :

Date / / Subject المعاملات المناسبة عبارة والأخيرة حظري (1)

٢- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

ولنفرض أن : $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2v'u' + uv''$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (1) فنجد أن :

$$(*)\quad uv'' + (2u' + P(x)u)\, v' + (u'' + P(x)u' + Q(x)u)\, v = f(x).$$

إذا فرضنا أن : $2u' + P(x)u = 0$ عندئذٍ :

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}P(x)$$

$$\ln u = -\frac{1}{2}\int P(x)\,dx \qquad u = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

أي أن : $y = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}\cdot v$

إذا فرضنا أن : $Q_1(x) = u'' + P(x)u' + Q(x)u$

عندئذٍ : ومن كون :

$$u' = -\frac{1}{2}P(x)u$$

$$u'' = -\frac{1}{2}P'(x)u - \frac{1}{2}P(x)u'$$

أي أن : $u'' = -\frac{1}{2}P'(x)u + \frac{1}{4}P^2(x)u$

أي أن :

$$Q_1(x) = Q(x)\cdot u + \frac{1}{4}P^2(x)u - \frac{1}{2}P'(x)u - \frac{1}{2}P^2(x)u$$

$$Q_1(x) = Q(x)u - \frac{1}{4}P^2(x)u - \frac{1}{2}P'(x)u$$

المعادلة * تأخذ الشكل الآتي :

$$uv'' + \left(Q(x)u - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x)\right)uv = f(x)$$

ومنه فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل :

$$v'' + \left(Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x)\right)v = f(x)\cdot e^{\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

- إذا كان :

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) = k$$

k ثابتاً عددياً تأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$v'' + k\cdot v = f(x)\, e^{+\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.

- أما إذا كان

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) = \frac{k}{x^2}$$

حيث k ثابت عددي.

فإن المعادلة تؤول إلى الشكل:

$$v'' + \frac{k}{x^2}v = f(x)\, e^{\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

$$x^2 v'' + kv = x^2 f(x)\, e^{\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

وهي معادلة أولر من المرتبة الثانية تحل كما درسنا في المحاضرة السابقة...

الحالة الثانية والأخيرة:

الحالة الأخيرة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$** - \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$$

لنفرض أن: $w = f(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}\right) = \frac{d}{dw}\left(\frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}\right)\frac{dw}{dx}$$

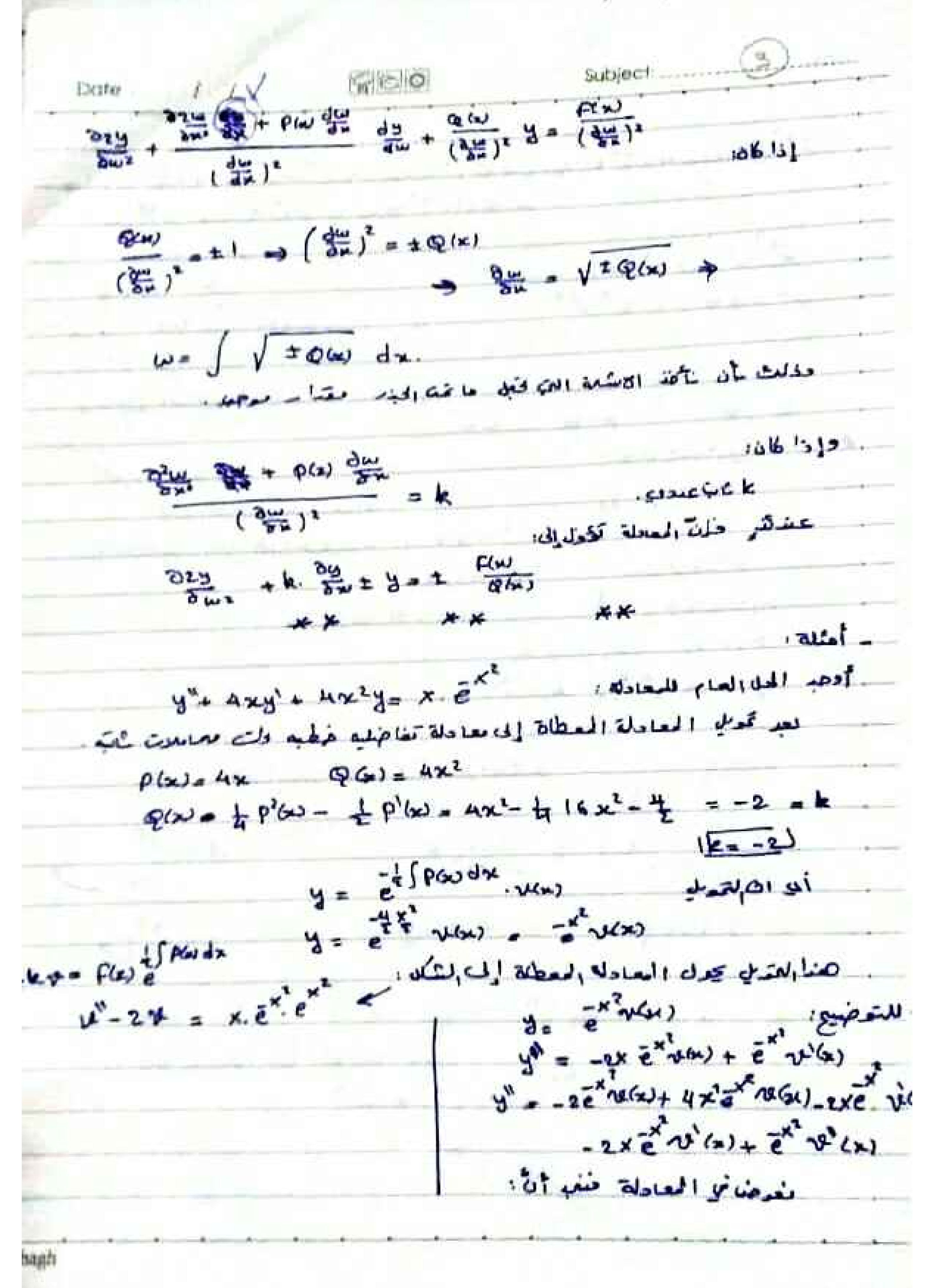
$$y'' = \left(\frac{\partial^2 y}{dw^2}\frac{dw}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{d^2 w}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}$$

$$y'' = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\frac{d^2 y}{dw^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial w}$$

بالتعويض في المعادلة: (**) نجد أن:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(x)\frac{dw}{dx}\right)\frac{dy}{dw} + Q(x)y = F(x)$$

ومنه فإن:



إذا كان:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{\frac{d^2w}{dx^2} + p(x)\frac{dw}{dx}}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2}\frac{dy}{dw} + \frac{Q(x)}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2}y = \frac{F(x)}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{Q(x)}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = \pm 1 \Rightarrow \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \pm Q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} = \sqrt{\pm Q(x)} \Rightarrow$$

$$w = \int \sqrt{\pm Q(x)}\, dx.$$

وذلك بأن نأخذ الاشارة التي تجعل ما تحت الجذر مقداراً موجباً.

وإذا كان:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2} + p(x)\frac{dw}{dx}}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = k$$

k ثابت عددي.

عندئذ فإن المعادلة تتحول إلى:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + k\frac{dy}{dw} \pm y = \pm\frac{F(x)}{Q(x)}$$

** ** **

- أمثلة:

أوجد الحل العام للمعادلة: $y'' + 4xy' + 4x^2y = x\cdot e^{-x^2}$

نعد تحويل المعادلة المعطاة إلى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

$p(x) = 4x \qquad Q(x) = 4x^2$

$Q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = 4x^2 - \frac{1}{4}16x^2 - \frac{4}{2} = -2 = k$

$k = -2$

أي أن التحويل: $y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}\cdot v(x)$

$y = e^{-\frac{4}{2}\frac{x^2}{2}}v(x) = e^{-x^2}v(x)$

هنا التحويل يحول المعادلة المعطاة إلى الشكل: $F = F(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$

$v'' - 2v = x\cdot e^{-x^2}\cdot e^{x^2}$

للتوضيح:

$y = e^{-x^2}v(x)$

$y' = -2x e^{-x^2}v(x) + e^{-x^2}v'(x)$

$y'' = -2e^{-x^2}v(x) + 4x^2e^{-x^2}v(x) - 2xe^{-x^2}v'(x)$
$\quad - 2xe^{-x^2}v'(x) + e^{-x^2}v''(x)$

نعوض في المعادلة فنجد أن:



$$e^{-x^2}v''(x) - 4xe^{-x^2}v'(x) + 4x^2e^{-x^2}v(x) - 2e^{-x^2}v(x) + 4xe^{-x^2}v'(x) - 8x^2e^{-x^2}v(x) + 4x^2e^{-x^2}v(x) = xe^{-x^2}$$

بتجميع الحدود:

$$e^{-x^2}v'' - 2e^{-x^2}v(x) = xe^{-x^2}$$

$$v'' - 2v = x \cdot e^{-x^2}e^{x^2}$$

Note ***

تحذف $P(x)$ عندما يكون أمثال أعلى مشتقة يساوي الواحد

* * * * * *

نعود للمعادلة:

$$v'' - 2v = x$$

الحل العام لهذه المعادلة:

$$v = v_h + v_p$$

لايجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$v'' - 2v = 0 \qquad (D^2 - 2D)v = 0$$

المعادلة المميزة لها

$$m^2 - 2 = 0$$

$$m_1 = \sqrt{2} \qquad m_2 = -\sqrt{2}$$

$$v_h = A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

- لايجاد v_p

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي: $\frac{1}{D^2-2}$

$$v_p = \frac{1}{D^2-2}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}D^2}x$$

$$1 - \tfrac{1}{2}D^2 \,\big)\, 1 \quad = 1 + \tfrac{1}{2}D^2$$
$$1 - \tfrac{1}{2}D^2$$
$$\tfrac{1}{2}D^2$$
$$\tfrac{1}{2}D^2 - \tfrac{1}{4}D^4$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}D^2\right)x = -\frac{1}{2}x$$

وبالتالي:

$$v = A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{x}{2}$$

فالحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = e^{-x^2}\left[A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{x}{2}\right]$$

Date : / /

Subject: (5)

مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^2 y'' - x(2x+3)y' + (x^2+3x+3)y = (6-x^2)e^x$$

بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وذلك من خلال اجراء التغيير المناسب على المتغير التابع y :

الحل:

المعادلة المعطاة تكتب على الشكل النموذجي

$$y'' - \frac{1}{x}(2x+3)y' + \frac{1}{x^2}(x^2+3x+3)y = \frac{6-x^2}{x^2}e^x$$

$$Q(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$P(x) = -2 - \frac{3}{x} \qquad P'(x) = \frac{3}{x^2}$$

لنحسب المقدار:

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4}\left(4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{x^2}$$

$$= \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4}\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{12-9-6}{4}\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{1}{x^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{x^2}$$

الآن التحويل :

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \cdot v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int -2-\frac{3}{x}dx} \cdot v(x)$$

$$y = e^{\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x}} \cdot v(x) = e^{x+\frac{3}{2}\ln x}\, v(x) = e^{x+\ln x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad y = x^{\frac{3}{2}} e^x v$$

هذا التحويل يحول المعادلة التفاضلية إلى الشكل :

$$x^2 v'' + k v = \left(\frac{6}{x^2} - 1\right)e^x \; e^{\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

أي :-

$$x^2 v'' - \frac{3}{4} v = x^2\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)e^x \cdot x^{-\frac{3}{2}} e^{-x}$$

$x^2u'' - \frac{3}{4}u = x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{x^2}-1\right)$

وهي معادلة أولر من المرتبة الثانية :

نفرض أن : $t = \ln x$ $x = e^t$

$x^2u'' = D_t(D_t-1)u$ $e^t dt = dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$

$\left(D_t(D_t-1) - \frac{3}{4}\right)u = e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{6}{e^{2t}}-1\right) = e^{\frac{1}{2}t}\left(6e^{-2t}-1\right)$

$6e^{-\frac{3}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}$

الحل العام للمتجانسة :

$\left(D_t^2 - D_t - \frac{3}{4}\right)u = 0$

المعادلة المميزة :

$m^2 - m - \frac{3}{4} = 0$

$\Delta = (1) - 4(1)\left(-\frac{3}{4}\right) = 1+3 = 4$ $\sqrt{\Delta} = 2$

$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1-2}{2} = -\frac{1}{2}$ $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow u_h = A_1 e^{-\frac{1}{2}t} + A_2 e^{\frac{3}{2}t}$

الحل الخاص : [illegible]

بالمؤثر التفاضلي $\frac{1}{(D+\frac{1}{2})(D-\frac{3}{2})}$

$u_p = \frac{1}{(D+\frac{1}{2})(D-\frac{3}{2})}\cdot\left(6e^{-\frac{3}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}\right)$

$\Rightarrow u_p = 6\cdot\frac{1}{(D-\frac{3}{2})(D+\frac{1}{2})}e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{(D+\frac{1}{2})(D-\frac{3}{2})}e^{\frac{1}{2}t}$

حيث يكون : [illegible]

$6\cdot\frac{1}{(D-\frac{3}{2})}\cdot e^{-\frac{3}{2}t} = 2e^{-\frac{3}{2}t}$

$\frac{-1}{(D+\frac{1}{2})(D-\frac{3}{2})}e^{\frac{1}{2}t} = +e^{\frac{1}{2}t}$

$u_p = 2e^{-\frac{3}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}$

$u = A_1e^{-\frac{1}{2}t} + A_2e^{\frac{3}{2}t} + 2e^{-\frac{3}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}$

Date : / /

Subject: (7)

$\Rightarrow y = e^{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} v$

أكمل؛

$y = e^{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} \left[\left(A_1 x^{\frac{3}{2}} + A_2 x^{-\frac{1}{2}} \right) + 2x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right]$

$y = A_1 x^3 e^{x} + A_2 x \cdot e^{x} + 2e^{x} + x^2 e^{x}$

H.ISMAIL

☆☆ ☆☆ ☆☆